|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент |  | Брытков Кузьма Андреевич |
| Группа |  | РК6-56Б |
| Тип задания |  | лабораторная работа |
| Тема лабораторной работы |  | Использование аппроксимаций для численной оптимизации |

Студент **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Брытков. К.А.\_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

Преподаватель **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_Соколов А.П. \_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

*Москва, 2021 г.*

Оглавление

[Задание на лабораторную работу 3](#_Toc87186478)

[Цель выполнения лабораторной работы 4](#_Toc87186479)

[Выполненные задачи 4](#_Toc87186480)

[1. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона 6](#_Toc87186481)

[2. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции 6](#_Toc87186482)

[3. Написание функции вычисления интеграла для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций 7](#_Toc87186483)

[4. Построение log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул 8](#_Toc87186484)

[5. Проведение анализа порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически 9](#_Toc87186485)

[Заключение 10](#_Toc87186486)

[Список использованных источников 10](#_Toc87186487)

# Задание на лабораторную работу

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе рассмотрена одна из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки достигнет точки под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая , которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

где обозначает ускорение свободного падение, и . Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

где и являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается и . Константы циклоиды для этого граничного условия равны , .

Требуется (базовая часть):

1. Написать функцию *composite\_simpson(a, b, n, f)*, численного интегрирования функции на интервале по узлам c помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию *composite\_trapezoid (a, b, n, f)*, численного интегрирования функции на интервале по 𝑛 узлам c помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл ([1](#Формула_1)) для функции , соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и со ставной формулы трапеций для множества значений . Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обоих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ

# Цель выполнения лабораторной работы

**Цель выполнения лабораторной работы** – написать алгоритмы для составных формул Симпсона и трапеций, попытаться определить порядок точности формулы, оценить порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.

# Выполненные задачи

1. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона
2. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции
3. Написание функции вычисления интеграла для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций
4. Построение log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул
5. Проведение анализа порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

# Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона

Из курса лекций известно, что составная формула Симпсона имеет вид:

где , и , где – четное число. При этом существует такое , что для .

Для вычислений интеграла ([3](#Формула_3)) опускаем остаточный член, так как он является малым, он используется в основном для выбора численного метода и его предварительного анализа.

Реализация данного алгоритма представлена в листинге (1):

Листинг 1 – функция вычисления составной формулы Симпсона

1. def composite\_simpson(a, b, n, func):
2. if n % 2 != 0:
3. n = n + 1
4. x = np.linspace(a, b, n + 1)
5. h = (b - a) / 2
6. result = func(x[0])
7. for x\_cur in x[2:-1:2]:
8. result = result + 2 \* func(x\_cur)
9. for x\_cur in x[1::2]:
10. result = result + 4 \* func(x\_cur)
11. result = result + func(x[-1])
12. result = result \* h / 3.
13. return result

# Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции

Из курса лекций известно, что составная формула трапеций имеет вид:

где , и , где . При этом существует такое , что для .

Для вычислений интеграла ([4](#Формула_4)) остаточный член был отброшен в виду его малости.

Реализация данного алгоритма представлена в листинге (2):

Листинг 2 – функция вычисления составной формулы трапеции

1. def composite\_trapezoid(a, b, n, func):
2. if n % 2 != 0:
3. n = n + 1
4. x = np.linspace(a, b, n + 1)
5. h = h = (b - a) / 2
6. result = func(x[0])
7. for x\_cur in x[1:-1:1]:
8. result = result + 2 \* func(x\_cur)
9. result = result + func(x[-1])
10. result = result \* h / 2.
11. return result

# Написание функции вычисления интеграла для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций

Для вычисления интеграла с помощью составных формул Симпсона и трапеций для начала нужно понять, как вычислять функционал.

Для его вычисления необходимо найти для . Для этого используем зависимость из аналитического решения, данного в (2), и функцией fsolve из библиотеки *scipy.optimize.* Она приравнивает функцию к 0 и ищет решение. Теперь зная t можно найти .

Из курса матанализа известно, что формула вычисления производной :

Так как известна зависимость и , были найдены их производные и вычислена по формуле ([5](#Формула_5)).

Теперь, зная и , можно вызвать функцию вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона и трапеции с параметрами , , и

# Построение log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул

Шаг интегрирования, одинаковый для обеих составных формул Симпсона и трапеций, и имеет вид:

где – количество точек на этом интервале, а и – границы интервала интегрирования.

Из курса лекций известно, что абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы Симпсона считается как:

Также известно, что абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы трапеции считается как:

График погрешности численного интегрирования представлен на рис. 1.

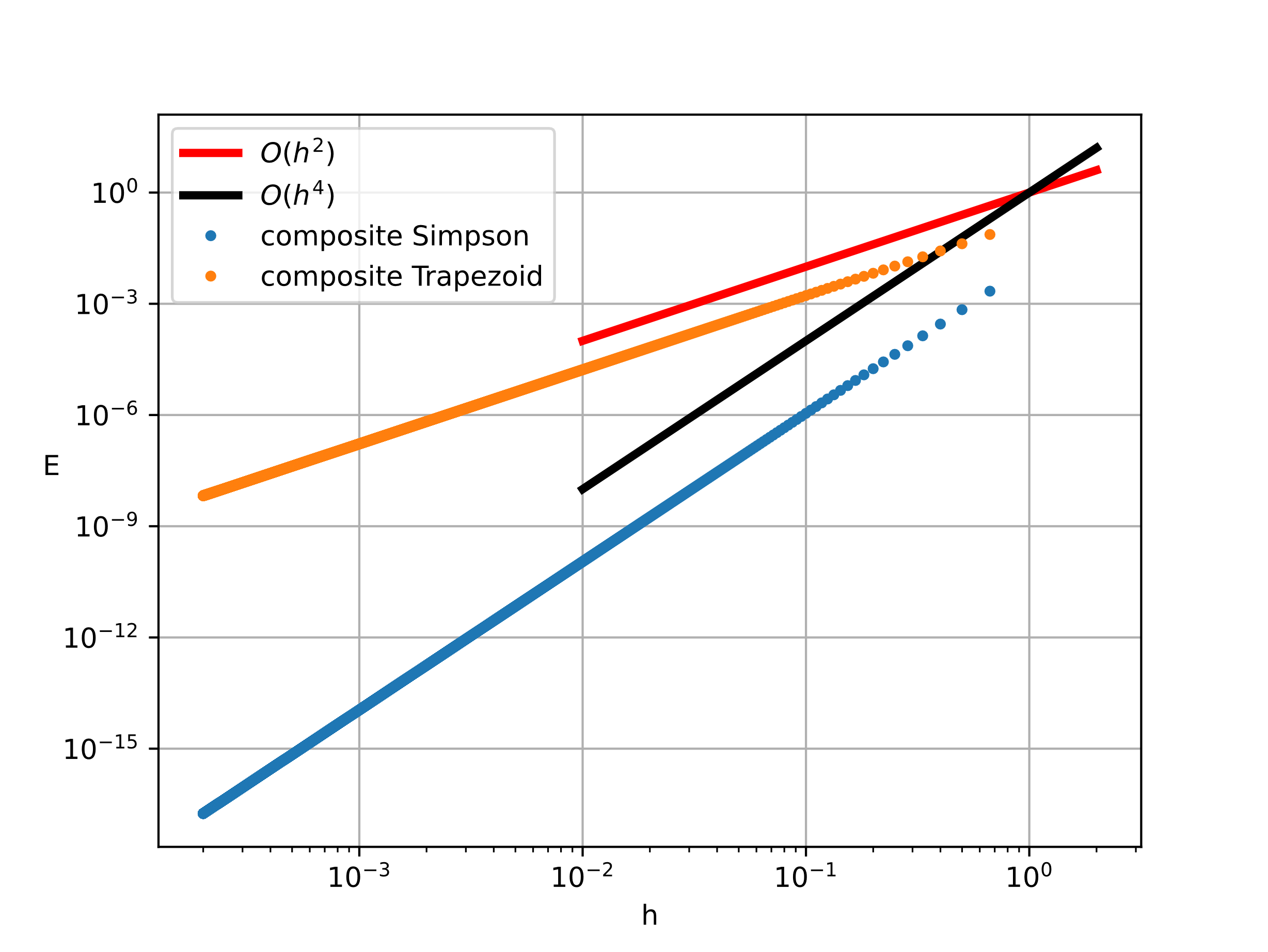


Рис. 1 – Абсолютная погрешность численного интегрирования от шага интегрирования

# Проведение анализа порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

По графику, изображенному на рис. [1](#Рисунок_1), видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы Симпсона, пропорциональна . Следовательно, порядок точности составной формулы Симпсона совпадает с аналитическим порядком точности и равен .

Также по графику, изображенному на рис. [1](#Рисунок_1), видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы трапеций, пропорциональна . То есть порядок точности составной формулы трапеций совпадает с аналитическим порядком точности и равен .

Оптимальный шаг интегрирования достигается при увеличении и соответственно, уменьшении .

# Заключение

В рамках выполнения лабораторной работы были реализованы функции вычисления интеграла с помощью составных формул Симпсона и трапеции.

Был вычислен интеграл для функционала с помощью этих составных формул.

Был сделан вывод, что с увеличением шага интегрирования, увеличивается погрешность вычисления приближенного значения интеграла.

Но если шаг станет меньше машинного эпсилон, то возрастание погрешности компьютерных вычислений станет значительно больше влиять на результат, чем уменьшение погрешности вследствие уменьшения h.

# Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.