|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

**ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Студент |  | @@@ @@@@ @@@@@@ |
| Группа |  | РК6-56Б |
| Тип задания |  | лабораторная работа |
| Тема лабораторной работы |  | Использование аппроксимаций для численной оптимизации |

Студент **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_@@@@ @.@.\_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

Преподаватель **\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \_Соколов А.П. \_\_**

*подпись, дата фамилия, и.о.*

*Москва, 2021 г.*

Оглавление

[Задание на лабораторную работу 3](#_Toc87126295)

[Цель выполнения лабораторной работы 4](#_Toc87126296)

[Выполненные задачи 4](#_Toc87126297)

[1. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона 6](#_Toc87126298)

[2. Алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции 6](#_Toc87126299)

[3. Интеграл для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций 7](#_Toc87126300)

[4. log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул 8](#_Toc87126301)

[5. Порядок точности формулы. Анализ порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически 9](#_Toc87126302)

[Заключение 10](#_Toc87126303)

[Список использованных источников 10](#_Toc87126304)

# Задание на лабораторную работу

Методы аппроксимации, такие как интерполяция и численное интегрирование, часто используются как составные блоки других, более сложных численных методов. В данной лабораторной работе рассмотрена одну из старейших задач вариационного исчисления: задачу о брахистохроне, т.е. задачу о кривой наискорейшего спуска. Она состоит в нахождении такой кривой, по которой материальная точка из точки достигнет точки под действием силы тяжести за наименьшее время (здесь и далее ось направлена вниз). Решением этой задачи является такая кривая , которая минимизирует следующий функционал, являющийся полным временем движения материальной точки:

где обозначает ускорение свободного падение, и . Эта задача имеет аналитическое решение, которым является параметрически заданная циклоида:

где и являются константами, значения которых находятся из граничного условия. В базовой части требуется воспользоваться численным интегрированием для нахождения полного времени движения материальной точки по кривой наискорейшего спуска. В продвинутой части требуется разработать метод для нахождения аппроксимации этой кривой. Здесь и далее принимается и . Константы циклоиды для этого граничного условия равны , .

Требуется (базовая часть):

1. Написать функцию *composite\_simpson(a, b, n, f)*, численного интегрирования функции на интервале по узлам c помощью составной формулы Симпсона.
2. Написать функцию *composite\_trapezoid (a, b, n, f)*, численного интегрирования функции на интервале по 𝑛 узлам c помощью составной формулы трапеций.
3. Рассчитать интеграл ([1](#Формула_1)) для функции , соответствующей кривой наискорейшего спуска, с помощью составной формулы Симпсона и со ставной формулы трапеций для множества значений . Постройте log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул.
4. Объясните, каким образом по полученному графику можно определить порядок точности формулы.
5. Для обоих формул сравните порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.
6. Существует ли оптимальный шаг интегрирования для данной формулы, минимизирующий достижимую погрешность? Обоснуйте свой ответ

# Цель выполнения лабораторной работы

**Цель выполнения лабораторной работы** – написать алгоритмы для составных формул Симпсона и трапеций, попытаться определить порядок точности формулы, оценить порядок, полученный с помощью графика, с аналитическим порядком точности.

# Выполненные задачи

1. Написан алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона
2. Написан алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции
3. Написана функция вычисления интеграла для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций
4. Выведен log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул
5. Проанализирован порядок точности формулы. Проведен анализ порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

# Написан алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона

Из курса лекций известно, что составная формула Симпсона имеет вид:

где , и , где – четное число. При этом существует такое такое, что для .

Для вычислений интеграла ([3](#Формула_3)) опустим остаточный член, так как он является малым, он используется в основном для выбора численного метода и его предварительного анализа.

Реализация данного алгоритма представлена в листинге (1):

Листинг 1 – функция вычисления составной формулы Симпсона

1. def composite\_simpson(a, b, n, func):
2. if n % 2 != 0:
3. n = n + 1
4. x = np.linspace(a, b, n + 1)
5. h = (b - a) / 2
6. result = func(x[0])
7. for x\_cur in x[2:-1:2]:
8. result = result + 2 \* func(x\_cur)
9. for x\_cur in x[1::2]:
10. result = result + 4 \* func(x\_cur)
11. result = result + func(x[-1])
12. result = result \* h / 3.
13. return result

# Написан алгоритм вычисления интеграла с помощью составной формулы трапеции

Из курса лекций мы знаем, что составная формула трапеций имеет вид:

где , и , где . При этом существует такое , то для .

Для вычислений интеграла ([4](#Формула_4)) остаточный член был отброшен в виду его малости.

Реализация данного алгоритма представлена в листинге (2):

Листинг 2 – функция вычисления составной формулы трапеции

1. def composite\_trapezoid(a, b, n, func):
2. if n % 2 != 0:
3. n = n + 1
4. x = np.linspace(a, b, n + 1)
5. h = h = (b - a) / 2
6. result = func(x[0])
7. for x\_cur in x[1:-1:1]:
8. result = result + 2 \* func(x\_cur)
9. result = result + func(x[-1])
10. result = result \* h / 2.
11. return result

# Написана функция вычисления интеграла для функции с помощью составных формул Симпсона и трапеций

Для вычисления интеграла с помощью составных формул Симпсона и трапеций для начала нужно понять, как вычислять функционал.

Для его вычисления необходимо найти для . Для этого воспользуемся зависимость из аналитического решения данного в (2) и функцией fsolve из библиотеки *scipy.optimize.* Она приравнивает функцию к 0 и ищет решение. Теперь зная t можно найти .

Для вычисления производной была использована формула:

Так как мы знаем зависимости и , просто найдём их производные и вычислим по формуле ([5](#Формула_5)).

Теперь зная и вызовем функции вычисления интеграла с помощью составной формулы Симпсона и трапеции с параметрами , , и

# Выведен log-log график зависимости абсолютной погрешности численного интегрирования от шага интегрирования для обеих формул

Шаг интегрирования одинаковый для обеих составных формул Симпсона и трапеций и имеет вид:

Где – количество точек на этом интервале, а и – границы интервала интегрирования.

Абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы Симпсона считается как:

Абсолютная погрешность интегрирования для составной формулы трапеции считается как:

График погрешности численного интегрирования представлен на рис. 1.

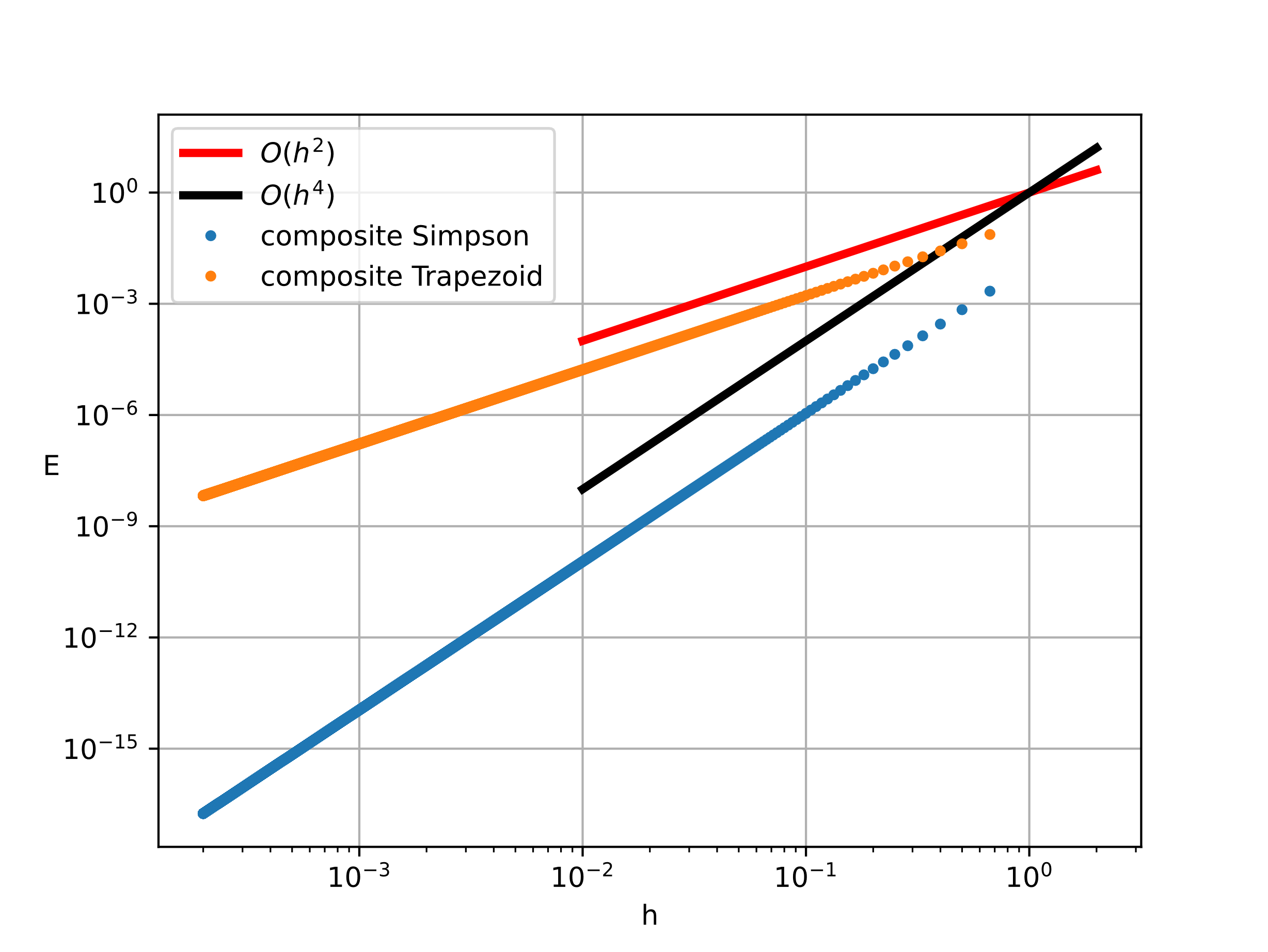


Рис. 1 – Абсолютная погрешность численного интегрирования от шага интегрирования

# Проанализирован порядок точности формулы. Проведен анализ порядка точности, полученного с помощью графика и аналитически

По графику, изображенному на рис. [1](#Рисунок_1), видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы Симпсона, пропорциональна . Следовательно порядок точности составной формулы Симпсона совпадает с аналитическим порядком точности и равен .

Также по графику, изображенному на рис. [1](#Рисунок_1), видно, что абсолютная погрешность, вычисленная с помощью составной формулы трапеций, пропорциональна . То есть порядок точности составной формулы трапеций совпадает с аналитическим порядком точности и равен .

Для оптимального шага интегрирования нужно взять маленький шаг интегрирования .

# Заключение

На лабораторной работе были реализованы составные формулы Симпсона и трапеции.

Был вычислен интеграл для функционала с помощью этих составных формул.

Был сделан вывод, что с увеличением шага интегрирования, увеличивается погрешность вычисления приближенного значения интеграла.

Но при постоянном уменьшении шага, и доходе до машинного эпсилона, погрешность при вычислениях пересилит погрешность математическую и будет увеличиваться вычислительная ошибка.

# Список использованных источников

1. Першин А.Ю. Лекции по курсу «Вычислительная математика. Москва, 2018-2021, С. 140.